Рассмотрим вращение материальной точки вокруг некоторой оси на расстоянии от оси и угловой скоростью .

Момент импульса такой точки имеет численное значение

где – расстояние (!) до оси вращения, а не длина радиус-вектора. Правильнее использовать символ , но он используется для дифференциала.

Можно также рассуждать с позиции векторной алгебры.

В плоскости вращения для материальной точки , тогда и

Видим, что в общем случае момент импульса выглядит довольно сложно и направления и не будут совпадать. В этом случае используется тензорная алгебра для вычисления его компонент. Однако, в случае вращения вокруг оси формулы становятся проще.

Если теперь рассматривать несколько точек, вращающихся вокруг той же оси то момент импульса системы равен и его численное значение:

Опять же, здесь – расстояния (!) точек до оси вращения.

Величину называют моментом инерции системы относительно оси. Тогда формулу можно переписать

Подчеркнем, что момент инерции зависит от положения оси вращения.

Если на вращение точек вокруг оси накладывается радиальное движение и (или) осевое, рассуждения не изменятся, и мы также получим формулу , но только теперь момент инерции перестает быть постоянной величиной.

Как известно

Тогда

где - момент внешних сил относительно оси вращения.

Если момент сил (например, для сил с осевой симметрией), то величина сохраняется. Это похоже на закон сохранения импульса.

Если точки совершают только вращательное движение, то момент инерции не изменяется и

Если рассматривать твердое дело как совокупность материальных точек, мы придем к такому же уравнению, где – момент всех внешних сил, действующих на тело.

**Работа внешних сил**:

Внутренние силы исключаются, т.к. работы они не совершают вследствие третьего закона Ньютона.

**Кинетическая энергия**:

Итак, в случае вращения жесткой системы точек или твердого тела вокруг оси, формально уравнения напоминают кинематические уравнения материальной точки, если заменить .

Для вычисления момента инерции однородного твердого тела его мысленно разбивают на элементарные объемы массой и производят суммирование (интегрирование) по всему объему:

Однако, в некоторых случаях можно получить необходимый результат элементарными методами. Для этого оказывается полезной **теорема Гюйгенса – Штейнера**.

Пусть – момент инерции некоторого тела относительно оси . Разбив тело на элементарные объемы с массами , можем написать

Рассмотрим ось смещенную параллельно оси на вектор . Относительно этой оси момент инерции найдется по формуле

Поскольку

Тогда

Как известно, центр масс тела определяется формулой

Или, в нашем случае

Тогда формулу можно переписать в виде

Если ось проходит через центр масс, то и формула приобретает простой вид

Таким образом, если нам известен момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, мы сможем легко найти момент инерции относительно любой другой оси, параллельной данной.

**Пример**. Момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через центр масс.

Для нахождения момента инерции относительно оси, проходящей через основание стержня, можно воспользоваться теоремой Гюйгенса-Штейнера